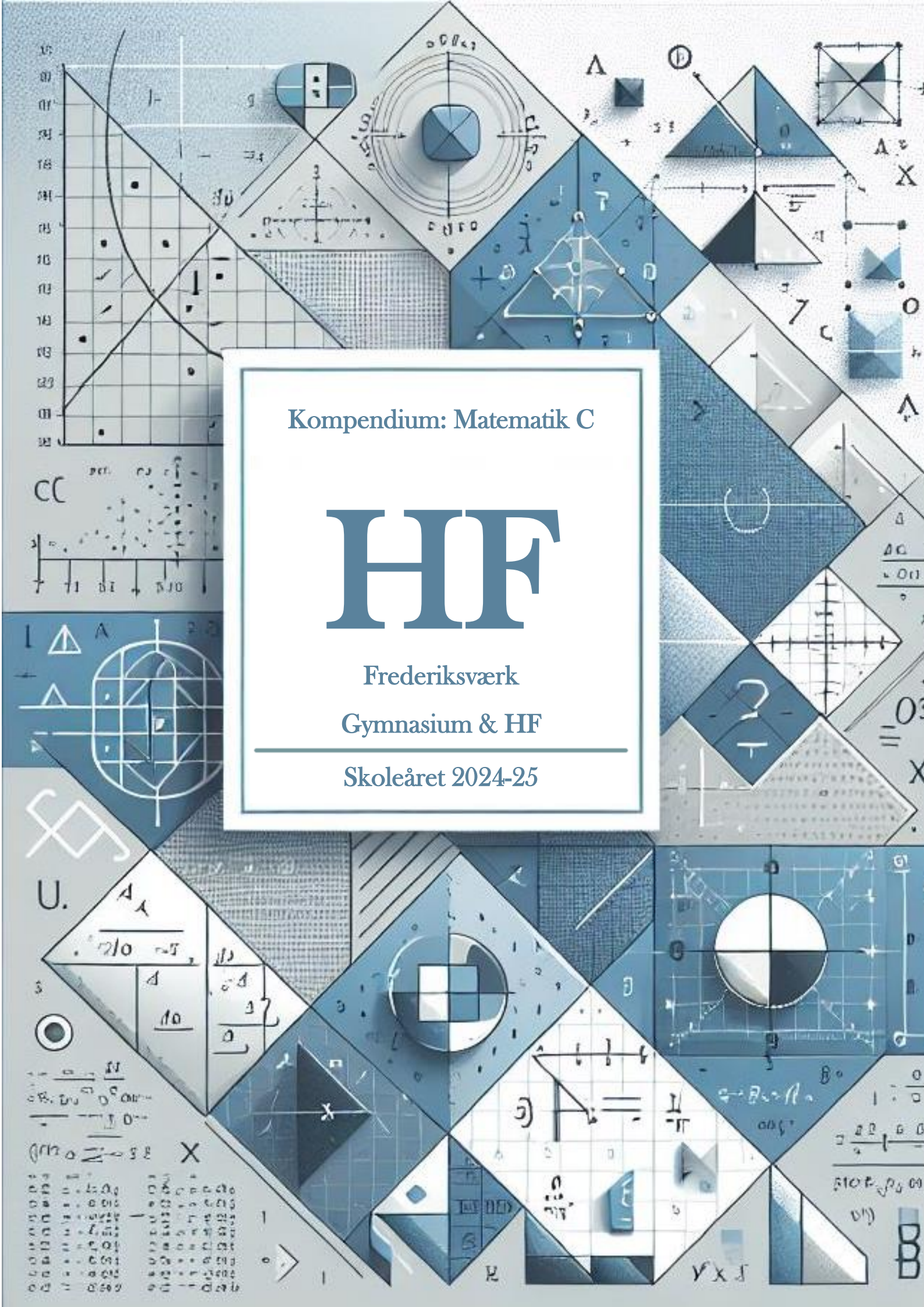




Kompendium: Matematik C

HF

Frederiksværk

Gymnasium & HF

Skoleåret 2024-25

Indholdsfortegnelse

Tal og algebra	4
Hele, Rationale og Reelle Tal	4
Regningsarternes Hierarki	4
Simpel Algebraisk Manipulation	4
Potens og Rod	5
Ligninger	5
Procentregning	6
Geometri og trigonometri	8
Trekanter	8
Pythagoras' Sætning	9
Enhedscirklen	9
Cosinus, Sinus og Tangens i Retvinklede Trekanter	10
Konstruktion af Vilkårlige Trekanter med Dynamisk Geometriprogram	13
Lineære funktioner	19
Definitioner	19
Grafen for en Lineær Funktion	19
Bestemmelse af Hældningskoefficienten og konstantleddet vha. Topunktsformlen	20
Bevis for topunktsformlen	20
Skæring mellem Graferne for To Lineære Funktioner	21
Simpel Matematisk Modellering med Lineære Funktioner	22
Lineær regression	22
Eksponentielle funktioner	27
Finansiell regning	30
Rentebegreber:	30
1. Årlig rente (Nominel rente) r :	31
2. Terminalsrente rt :	31
3. Rentes rente og Effektiv årlig rente:	31
4. Gennemsnitlig rente	32
5. ÅOP (Årlige Omkostninger i Procent):	33
Deskriptiv statistik	35

Sandsynlighedsregning	35
-----------------------------	----

Tal og algebra

Hele, Rationale og Reelle Tal

Hele Tal, $\mathbb{Z}$

Hele tal er de tal, vi bruger til at tælle med, og de inkluderer både positive og negative tal samt nul. Eksempler på hele tal er -3, 0, 7 og 15.

Rationale Tal, $\mathbb{Q}$

Rationale tal er tal, der kan skrives som en brøk, hvor både tæller og nævner er hele tal, og nævneren ikke er nul. Eksempler på rationale tal er $1/2$, $-3/4$ og 5 (som kan skrives som $5/1$).

Reelle Tal, $\mathbb{R}$

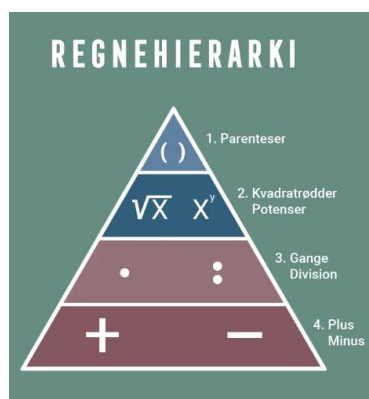
Reelle tal inkluderer både rationale og irrationale tal. Irrationale tal kan ikke skrives som en brøk og har uendelige ikke-periodiske decimaler. Eksempler på irrationale tal er π (pi) og $\sqrt{2}$.

Regningsarternes Hierarki

Når vi udfører beregninger, er det vigtigt at følge regningsarternes hierarki for at få det korrekte resultat. Hierarkiet er som følger:

1. Parenteser
2. Potenser og rødder
3. Multiplikation (gange) og division
4. Addition (plus) og subtraktion (minus)

Eksempel: $3 + 2 \cdot (5 - 2)^2 = 3 + 2 \cdot 3^2 = 3 + 2 \cdot 9 = 3 + 18 = 21$



Simpel Algebraisk Manipulation

Algebraisk manipulation involverer omformning af udtryk ved at anvende regler for addition, subtraktion, multiplikation og division. For eksempel: $2(x + 3) = 2x + 6$

Når et udtryk forsimples igennem algebraisk manipulation kalder vi at vi reducerer et udtryk.

Multiplikation af Flerledelede Parenteser

Når vi multiplicerer (ganger) flerledelede parenteser, anvender vi distributiv lov:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Eksempel:

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

Potens og Rod

Potensregneregler

Potensregneregler hjælper os med at forenkle udtryk med potenser:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^0 = 1$ (forudsat at $a \neq 0$)

Rødder

Rødder er det omvendte af potenser. Kvadratroden af et tal (a) er det tal (b), som opfylder, at (b) ganget med sig selv giver (a). Med andre ord, $b^2 = a$.

For eksempel er kvadratroden af 16 lig med 4, fordi $4 \cdot 4 = 16$.

Ligninger

Ligningsløsning med Algebraiske, Grafiske og Digitale Metoder

Ligninger kan løses på forskellige måder:

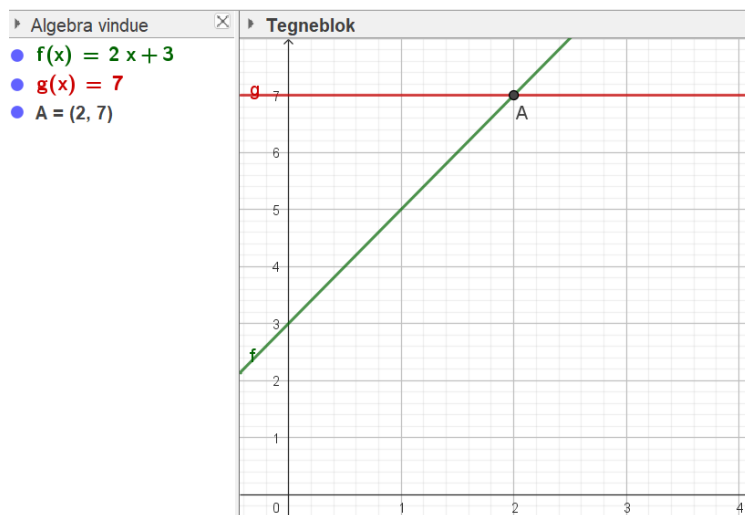
- **Algebraisk:** Ved at isolere den ukendte. Eksempel:

$$2x + 3 = 7$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

- **Grafisk:** Ved at tegne grafer og finde skæringspunkter.



Screenshot fra GeoGebra

Her kan aflæses at skæringspunktet hedder $A=(2,7)$. Da x-koordinatet til skæringen er to betyder det at $x=2$ er en løsning til ligningen.

- **Digitale Metoder:** Ved brug af software som CAS (Computer Algebra System).



Screenshot fra NSpire

Procentregning

Procent betyder "per hundrede". For at finde procentdelen af et tal, multiplicerer vi med procenten og dividerer med 100. Eksempel: $20\% \text{ af } 50 = \frac{20}{100} \cdot 50 = 10$

Dette svarer ligeledes til at gange med procentsatsen skrevet som et decimaltal:

$$20\% \text{ af } 50 = 0,20 \cdot 50 = 10$$

Ønsker vi at trække en procent fra et tal kan dette gøres ved at regne den procent der vil være tilbage.

Eksempel: jeg ønsker at trække 13% fra 65. Hvis jeg trækker 13% fra svarer det til at der er $100 - 13 = 87\%$ tilbage. Altså er $65 - 13\% = 65 \cdot 0,85 = 55,25$

Ønsker jeg at lægge en procentsats til kan jeg gange tallet med $1 + \text{procenten i decimaltal}$.
Eksempel: jeg ønsker at lægge 13% til 65. Først finder jeg 13 som et decimaltal: $13\% = 0,13$
(fordi $\frac{13}{100} = 0,13$) nu kan jeg finde resultatet:

$$65 \cdot (1 + 0,13) = 65 \cdot 1,13 \approx 73,45$$

Fra procent til decimal

For at omregne en procent til en decimal, skal du dividere procenttallet med 100.

Eksempel:

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25$$
$$75\% = \frac{75}{100} = 0,75$$

Fra decimal til procent

For at omregne en decimal til en procent, skal du multiplicere decimalen med 100.

Eksempel:

$$0,4 = 0,4 \cdot 100 = 40\%$$
$$0,85 = 0,85 \cdot 100 = 85\%$$

En nem måde at huske det på er, at procent betyder "per hundrede", så du flytter decimaltegnet to pladser til venstre for at gå fra procent til decimal, og to pladser til højre for at gå fra decimal til procent.

Hvordan Finder Man Ud af, Hvor Mange Procent Et Tal Udgør af Et Andet?

At finde ud af, hvor mange procent et tal udgør af et andet, er en nyttig færdighed, især når du arbejder med data eller sammenligner forskellige mængder. Her er en enkel metode til at gøre det:

1. **Identificer de to tal:** Lad os sige, du vil finde ud af, hvor mange procent 25 er af 80.
2. **Del det første tal med det andet tal:** Du skal dele 25 med 80: $\frac{25}{80} = 0,3125$
3. **Gør resultatet til procent:** For at omdanne 0,3125 til procent, skal du gange med 100.
 $0,3125 \cdot 100 = 31,25\%$

Så 25 svarer 31,25% af 80

Eksempel

Forestil dig, at du har fået 45 point ud af 60 mulige i en test, og du vil vide, hvor mange procent du har fået:

1. **Find de to tal:** Du har fået 45 point ud af 60.
2. **Del det første tal med det andet tal:** $\frac{45}{60} = 0,75$
3. **Gør resultatet til procent:** $0,75 \cdot 100 = 75$

Du har fået 75% i testen!

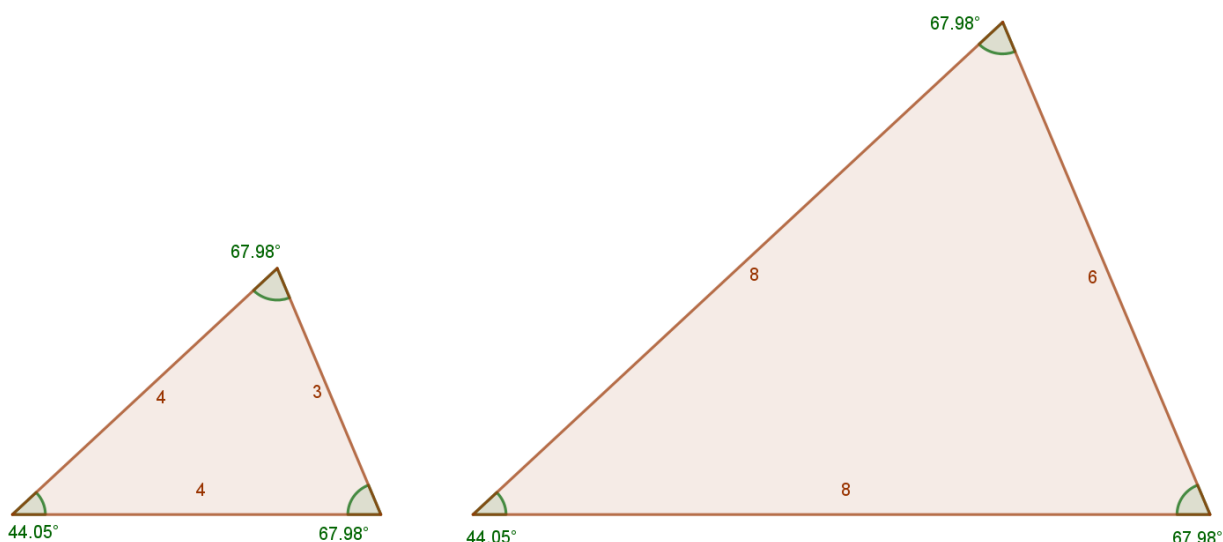
Geometri og trigonometri

Trekanter

Ensvinklede og Retvinklede Trekanter

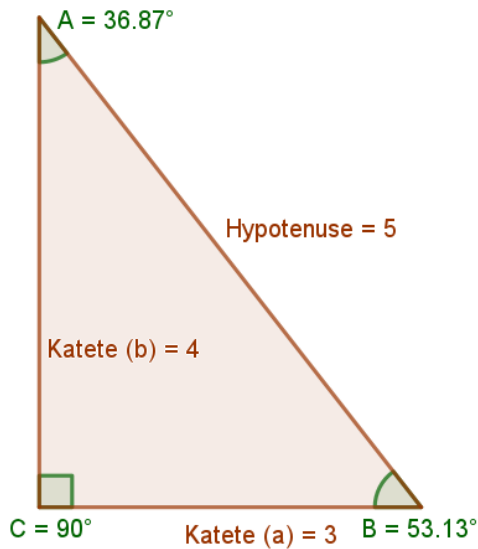
En trekant er en geometrisk figur med tre sider og tre vinkler. Trekanter kan klassificeres på forskellige måder, herunder ensvinklede og retvinklede trekanter.

Ensvinklede Trekanter: To trekanter er ensvinklede, hvis deres tilsvarende vinkler er lige store. Dette betyder, at trekanterne har samme form, men ikke nødvendigvis samme størrelse. For eksempel:



Retvinklede Trekanter: En trekant er retvinklet, hvis den har en vinkel, der er 90 grader. Den side, der ligger overfor den rette vinkel, kaldes hypotenusen, og de to andre sider kaldes kateter.

For eksempel



Pythagoras' Sætning

Pythagoras' sætning gælder kun for retvinklede trekanter og siger, at kvadratet på hypotenusen er lig summen af kvadraterne på de to kateter. Matematisk kan det skrives som: $a^2 + b^2 = c^2$ hvor c er hypotenusen, og a og b er de to kateter.

Skal vi for eksempel bruge Pythagoras' sætning på 3-4-5-trekanten ovenfor vil man skrive:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$c = \sqrt{25} = 5$$

Kender man omvendt hypotenusen og én af kateterne kan den anden katete findes ved:

$$c^2 - a^2 = b^2$$

Med eksemplet fra før:

$$5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$$a = \sqrt{9} = 3$$

Enhedscirklen

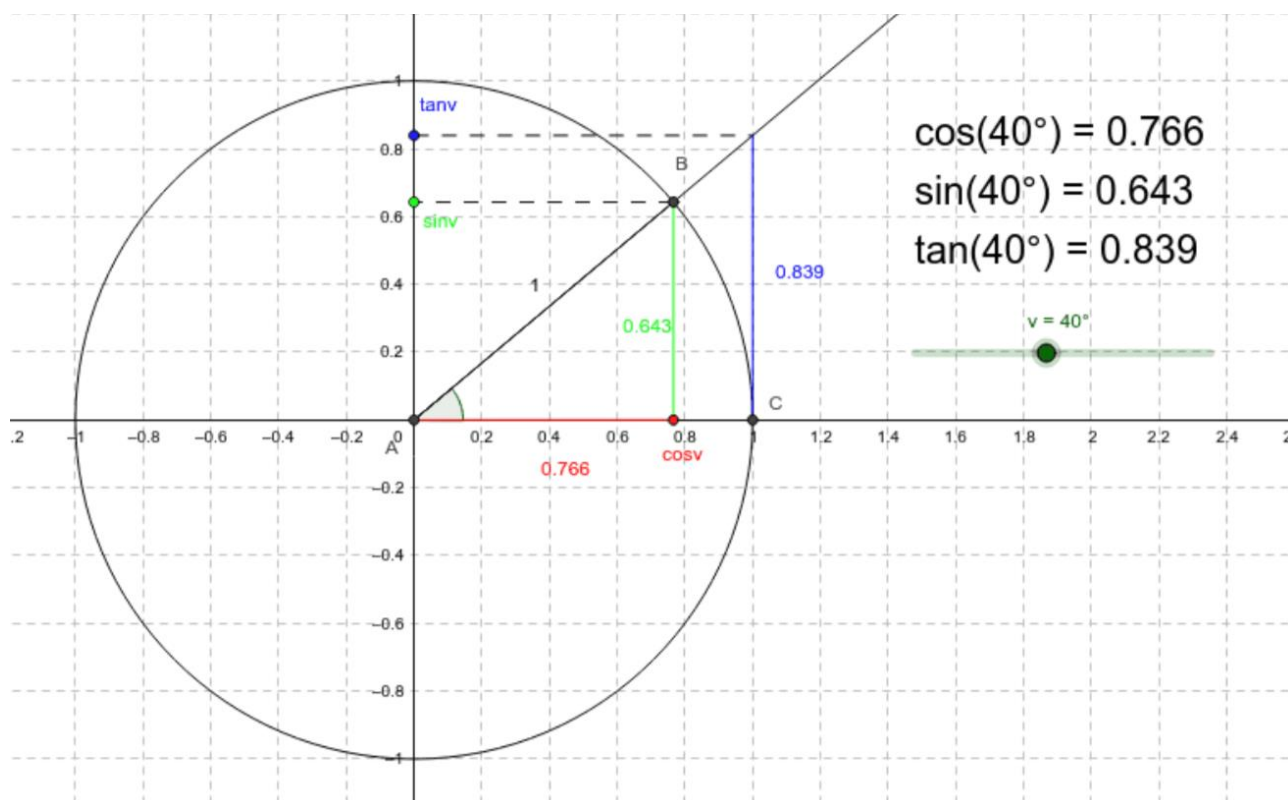
Enhedscirklen er en cirkel med radius 1, centreret i origo (0,0) i et koordinatsystem. Ved at bruge enhedscirklen kan vi forstå definitionerne af cosinus, sinus og tangens på en intuitiv måde.

Sinus: For en vinkel θ i enhedscirklen er sinus værdien af y-koordinaten for det punkt på cirklen, der svarer til vinklen θ . Dette punkt opnås ved at tegne en linje fra origo, der danner vinklen θ med x-aksen.

Cosinus: For en vinkel θ i enhedscirklen er cosinus værdien af x-koordinaten for det punkt på cirklen, der svarer til vinklen θ .

Tangens: Tangens for en vinkel θ er forholdet mellem sinus og cosinus for denne vinkel. I enhedscirklen svarer dette til hældningen af linjen, der går gennem origo og punktet på cirklen.

For vinkler mellem 0 og 90 grader kan tangens til vinklen også forstås som y-koordinatet til skæringspunktet mellem vinklens linje og enhedscirkelns tangens i $x=1$ (se tegning)



I linket [her](#) kan du prøve dig frem med forskellige vinkler og aflæse hvad Cosinus, Sinus og tangens er.

Cosinus, Sinus og Tangens i Retvinklede Trekanten

Cosinus, sinus og tangens er fundamentale trigonometriske funktioner, der bruges til at beskrive forholdet mellem vinkler og sider i retvinklede trekanter. Disse funktioner er nyttige, fordi de giver en måde at beregne ukendte sider og vinkler på, når nogle af trekantens elementer er kendt.

Sinus: For en vinkel θ er sinusforholdet mellem den modstående katete og hypotenusen.

$$\sin(\theta) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenuse}}$$

Cosinus: For en vinkel θ er cosinusforholdet mellem den hosliggende katete og hypotenusen.

$$\cos(\theta) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenuse}}$$

Tangens: For en vinkel θ er tangens forholdet mellem den modstående katete og den hosliggende katete.

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

Eksempler:

Eksempel 1: Beregning af en Side ved Hjælp af Sinus

En retvinklet trekant har en vinkel $\theta = 30^\circ$ og en hypotenuse på 10 cm. Beregn længden af den modstående katete.

Løsning: Vi bruger sinus-funktionen: Vi indsætter de oplysninger vi får givet i sinusformlen:

$$\sin(\theta) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenuse}};$$

$$\sin(30^\circ) = \frac{\text{modstående katete}}{10}$$

Vi løser nu ligningen (isolere "modstående katete")

$$\sin(30^\circ) \cdot 10 = \text{modstående katete}$$

$$\sin(30^\circ) \cdot 10 \approx 5$$

Eksempel 2: Beregning af en Vinkel ved Hjælp af Cosinus

En retvinklet trekant har en hosliggende katete på 8 cm og en hypotenuse på 10 cm. Beregn vinklen θ .

Løsning: Vi bruger cosinus-formlen: $\cos(\theta) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenuse}}$

$$\cos(\theta) = \frac{8}{10}$$

$$\cos(\theta) = 0,8$$

For at finde θ , bruger vi den inverse cosinus-funktion:

$$\theta = \cos^{-1}(0,8) = 36.87^\circ$$

Eksempel 3: Beregning af en Side ved Hjælp af Tangens

En retvinklet trekant har en vinkel $\theta = 45^\circ$ og en hosliggende katete på 7 cm. Beregn længden af den modstående katete.

Løsning: Vi bruger tangens-formlen: $\tan(\theta) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$

$$\tan(45^\circ) = \frac{\text{modstående katete}}{7}$$

Da $\tan(45^\circ) = 1$ får vi:

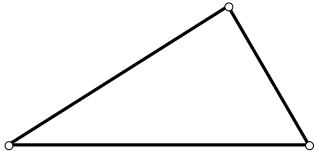
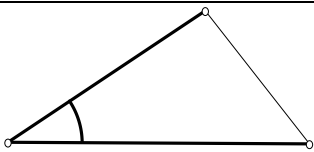
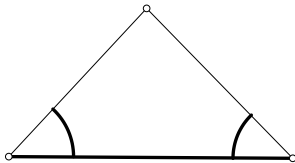
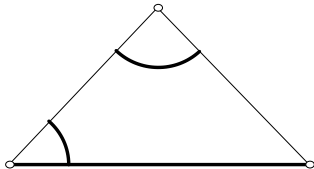
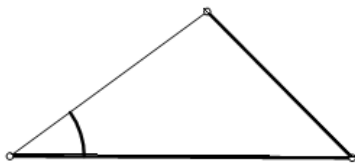
$$1 = \frac{\text{modstående katete}}{7}$$

$$\text{modstående katete} = 1 \cdot 7 = 7\text{cm}$$

Konstruktion af Vilkårlige Trekanter med Dynamisk Geometriprogram

Dette kapitel er skrevet af Thomas Møller Harvig, alle video er ligeledes produceret af Thomas. Tak for bidraget.

Der er 5 trekantstilfælde i skal kunne konstruere - De såkaldte **5 trekantstilfælde**.

Første trekanttilfælde		Givet: De tre sider
Andet trekanttilfælde		Givet: En vinkel og de to hosliggende sider
Tredje trekanttilfælde		Givet: En side og de to hosliggende vinkler
Fjerde trekanttilfælde		Givet: En side, en hosliggende vinkel og den modstående vinkel
Femte trekanttilfælde		Givet: En vinkel, en hosliggende side og den modstående side

Konstruktion af de fem trekantstilfælde vises på video. Man kan vælge at bruge nspire, Geogebra eller prøve begge dele.

Følg følgende link:

1.trekantstilfælde - nspire:

<https://www.youtube.com/watch?v=hHGef1BvDaw>

1.trekantstilfælde - GeoGebra:

<https://www.youtube.com/watch?v=agsxl8p792M>

2.trekantstilfælde - nspire:

<https://www.youtube.com/watch?v=37SMApHNjWE>

2.trekantstilfælde - Geogebra:

https://www.youtube.com/watch?v=Cuh9lBROX_c

3. og 4. trekantstilfælde kan håndteres på samme måde, hvis man i 4.trekantstilfælde bare finder den sidste vinkel vha. vinkelsummen på 180^0 . Derfor er der kun én video her.

3. (og 4.) trekantstilfælde - nspire:

<https://www.youtube.com/watch?v=GqwPztg2YgQ>

3. (og 4) trekantstilfælde - GeoGebra:

<https://www.youtube.com/watch?v=ji4c5jE4LWc>

5 trekantstilfælde er lidt speciel fordi man kan risikere at stå med to trekanter som opfylder de betingelser som oplyses. Altså en given opgave har to løsninger. Men uanset hvad er metoden den samme. Her vises to eksempler, hvor den første kun har en løsning mens det andet har to.

5.trekantstilfælde - nspire: (én løsning)

<https://www.youtube.com/watch?v=2YjL6QMuGMg>

5.trekantstilfælde - GeoGebra: (én løsning)

<https://www.youtube.com/watch?v=BHwLWDqmzPc>

5.trekantstilfælde - nspire: (to løsninger)

<https://www.youtube.com/watch?v=reHc3FHiFn8>

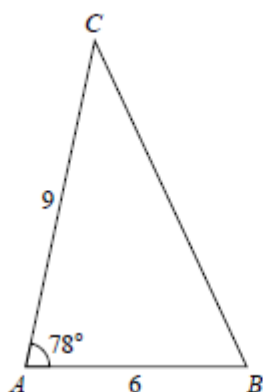
Den sidste vises kun i nspire, da metoden egentlig er den samme som for tilfældet med én løsning. Derfor er tanken med den sidste kun at gøre opmærksom på at der kan være to løsninger til en sådan opgave.

Hvad er kravet til den skriftlige eksamen?

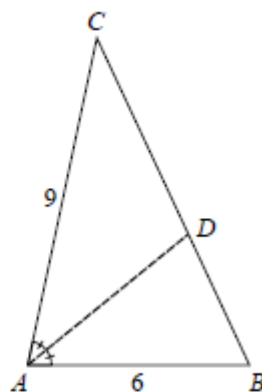
Her gennemgås en tidligere eksamensopgave for at I bliver klogere på hvad kravet er til den skriftlige eksamen (til terminsprøven og i afleveringer)

Opgaven ser ud på følgende måde:

Opgave 8



Figur 1



Figur 2

Figur 1 viser trekant ABC . Nogle af trekantens mål fremgår af figuren.

(10 point)

a) Konstruer en målfast tegning af trekant ABC , og forklar konstruktionen.

Vinkelhalveringslinjen for A skærer siden BC i punktet D , se figur 2.

(10 point)

b) Bestem længden af linjestykket BD .

Det første man gør er, uanset om det er med eller uden hjælpemidler, at man laver en indledning.

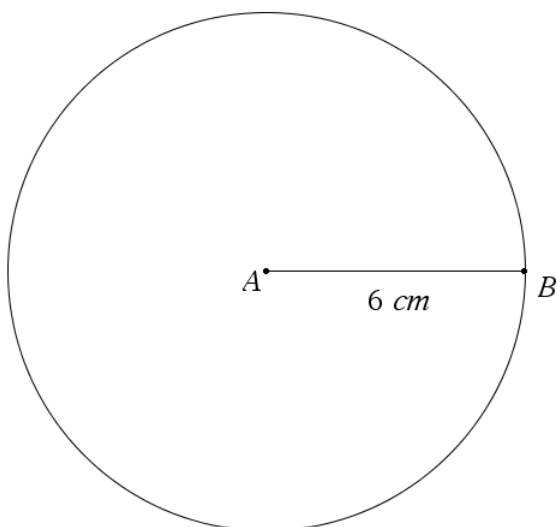
Det bedste er selvfølgelig at skrive en indledning selv, men man kan også vælge at klippe opgaveformuleringen ind. Husk at 8a) er en selvstændig opgave, så b) må ikke være med i indklippet.

Opgave 8:

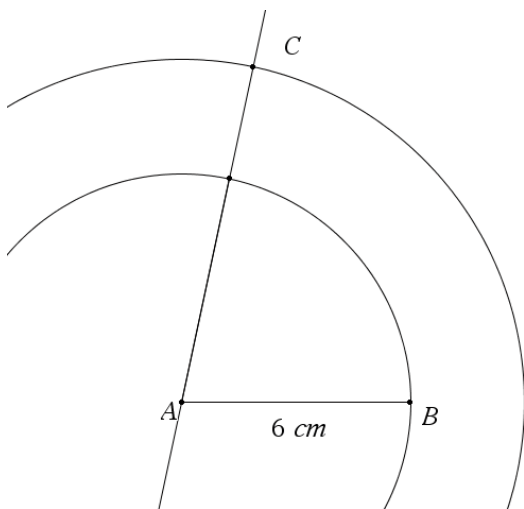
Jeg betragter en trekant ABC , hvor vi får oplyst at $A = 78^\circ$, $b = 9$ og $c = 6$.

Jeg skal konstruere en målfast tegning af trekant ABC .

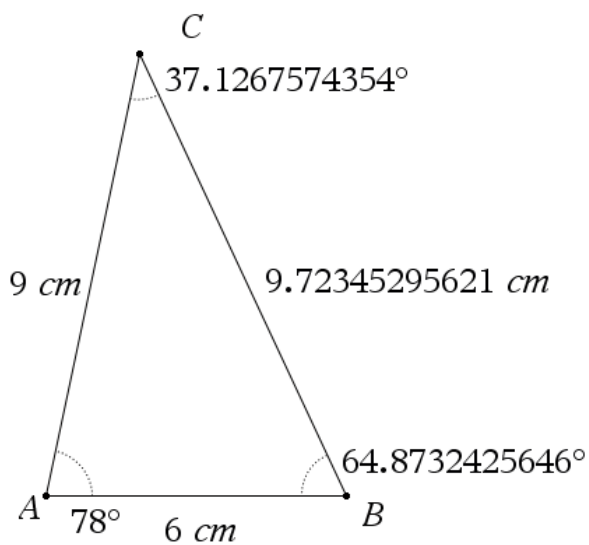
Først tegnes grundlinjen c , linjestykke AB , ved at tegne en cirkel med længden 6.



Herefter tegnes en cirkel med en længde på 9, linjestykket AB drejes med en vinkel på 78° og det nye linjestykke forlænges indtil skæringspunktet C kan dannes.



Vi kan nu tegne trekant ABC.

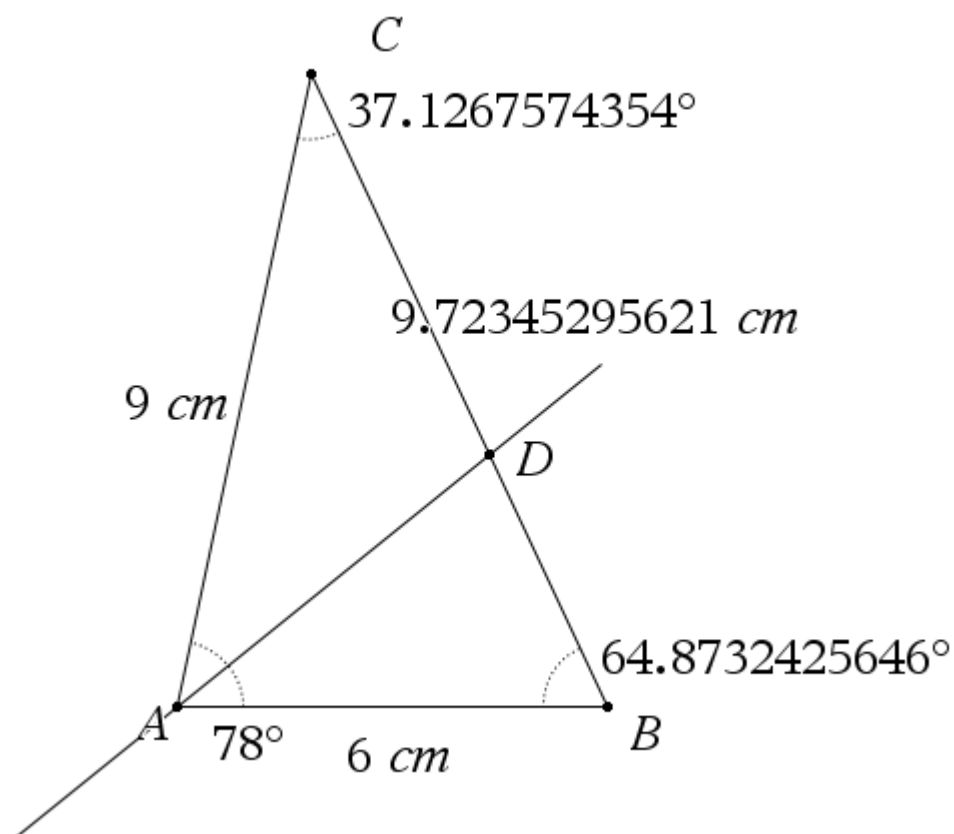
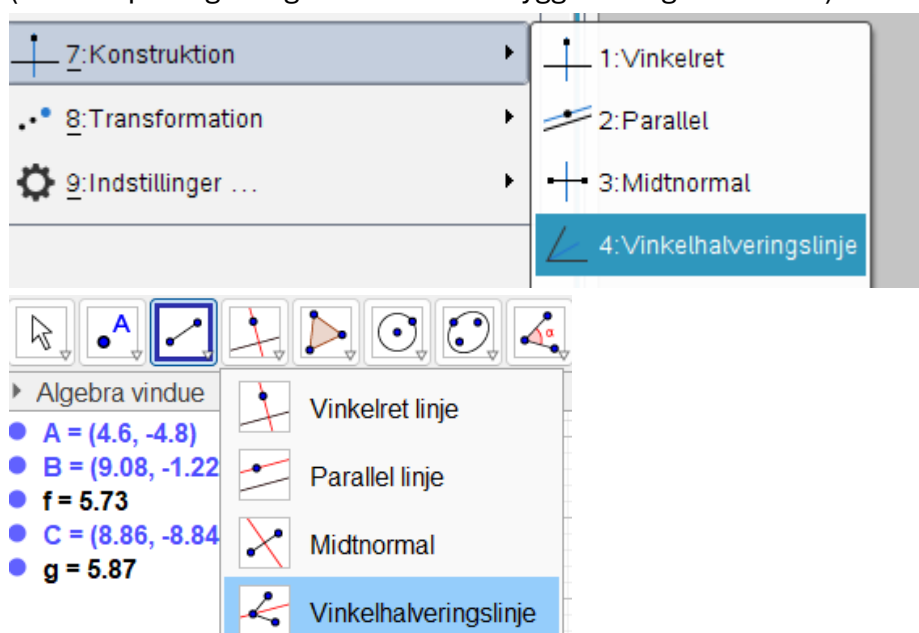


Vinkelhalveringslinjen for A skærer siden BC i punktet D.

Vi skal bestemme længden af linjestykket BD.

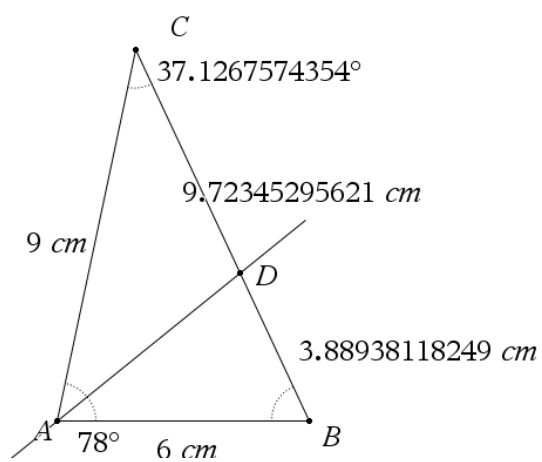
Først tegnes vinkelhalveringslinjen for A.

(både nspire og Geogebra har en indbygget mulighed for det)



(instruktion, jeg trykkede på "vinkelhalveringslinje" og herefter på punkterne B, A, C i den rækkefølge. Herefter vælges skæringspunkt mellem vinkelhalveringslinjen og linjestykket BC).

Nu måles længden af linjestykket BD (instruktion, mål afstanden mellem de to punkter)



Vi kan konkludere, at afstanden BD ca. er 3,89 (benævnelse ukendt).

Dette var et eksempel på hvad man skal gøre til eksamen, terminsprøven og i afleveringerne.

Lineære funktioner

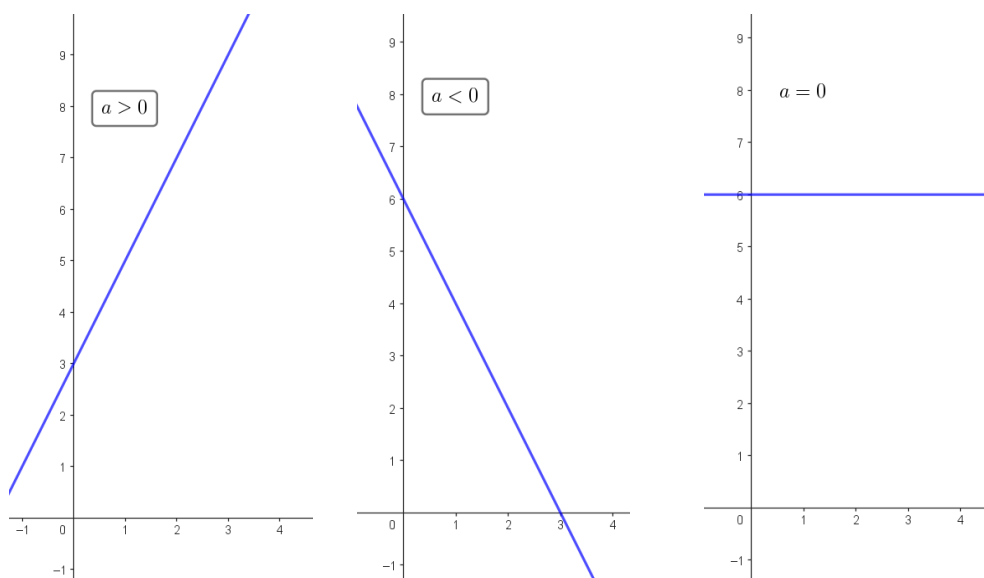
En funktion beskriver en sammenhæng mellem to variable, hvor hver værdi af den uafhængige variabel (ofte kaldet x) har præcis én værdi af den afhængige variabel (ofte kaldet y). En lineær funktion er en funktion, hvor grafen er en ret linje.

Definitioner

En lineær funktion kan skrives på formen: $f(x) = ax + b$ hvor a og b er konstanter. Her kaldes a for hældningskoefficienten, og b kaldes for skæringspunktet med y -aksen.

Hældningskoefficienten

Hældningskoefficienten a beskriver, hvor meget $f(x)$ (eller y) ændrer sig, når x vokser med 1. Hvis a er positiv, stiger linjen, og hvis a er negativ, falder linjen. Hvis a er nul, er linjen vandret.



Skæringspunktet med y -aksen

Skæringspunktet b er den værdi, hvor linjen skærer y -aksen. Det er værdien af $f(x)$ (eller y), når $x = 0$.

Eksempel

Lad os se på en lineær funktion $f(x) = 2x + 3$.

Her er hældningskoefficienten $a = 2$, hvilket betyder, at hver gang x øges med 1, stiger $f(x)$ (eller y) med 2 enheder. Skæringspunktet med y -aksen er 3, hvilket betyder, at $b = 3$.

Grafen for en Lineær Funktion

Grafen for en lineær funktion er en ret linje. For at tegne grafen kan man bruge to punkter:

Skæringspunktet med y-aksen $(0, b)$

Et andet punkt, som kan findes ved at vælge en værdi for x og beregne den tilsvarende værdi af $f(x)$.

Eksempel

For funktionen $f(x) = 2x + 3$

Skæringspunktet med y-aksen er $(0, 3)$.

Vælg $x = 1$, så får vi at $y = f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$

Så punktet $(1, 5)$ ligger også på linjen.

Ved at tegne disse to punkter og forbinde dem med en ret linje, får vi grafen for funktionen.

Bestemmelse af Hældningskoefficienten og konstantleddet vha. Topunktsformlen

Hvis vi kender to punkter på en linje, (x_1, y_1) og (x_2, y_2) , kan vi finde hældningskoefficienten a ved hjælp af topunktsformlen: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ og konstantleddet b ved hjælp af formelen:

$$b = y_2 - a \cdot x_2$$

Eksempel

Lad os finde funktionsforskriften for en linje, der går gennem punkterne $(1, 2)$ og $(3, 6)$:

$$a = \frac{6 - 2}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Og

$$b = 6 - 2 \cdot 2 = 2$$

Altså får vi at $f(x) = 2x + 2$

Bevis for topunktsformlen

Vi har funktionen: $y = a \cdot x + b$, den går igennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

Når vi skal bevise topunktsformlen starter vi med at huske at:

$$y_1 = a \cdot x_1 + b$$

Og

$$y_2 = a \cdot x_2 + b$$

Når det nu er hældningen/ændringerne vi er interesseret i at kigge på finder vi forskellen:

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_1 + b - (a \cdot x_2 + b)$$

Nu ophæves parenteser (husk det er en minusparentes)

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_1 + b - a \cdot x_2 - b$$

b'erne går nu ud med hinanden

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_1 - a \cdot x_2$$

Nu ser vi at der er a på alle led på højre side. Det betyder at a er en fælles faktor og kan sættes uden for parentes:

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_1 - x_2)$$

Husk på det er a vi skal isolere. Nu divideres med $x_1 - x_2$ på begge sider:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

■

Nu formelen for b . Vi har at

$$y_2 = a \cdot x_2 + b$$

Vi trækker $a \cdot x_2$ fra på begge sider og får:

$$y_2 - a \cdot x_2 = b \quad \blacksquare$$

Vil du hellere se en video så kan jeg anbefale denne: [Frividen | Lineær funktion](#)

Skæring mellem Graferne for To Lineære Funktioner

For at finde skæringspunktet mellem to lineære funktioner, $f(x) = a_1x + b_1$ og $g(x) = a_2x + b_2$, skal vi løse ligningssystemet: $a_1 \cdot x + b_1 = a_2 \cdot x + b_2$

Eksempel

Lad os finde skæringspunktet mellem $f(x) = 2x + 3$ og $g(x) = -x + 1$

$$2x + 3 = -x + 1$$

$$3x = -2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Indsæt x i en af funktionerne for at finde y -koordinatet:

$$y = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 = -\frac{4}{3} + 3 = -\frac{4}{3} + \frac{9}{3} = \frac{5}{3}$$

Så skæringspunktet er $\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

Simpel Matematisk Modellering med Lineære Funktioner

Lineære funktioner kan bruges til at modellere simple sammenhænge i virkeligheden, hvor en variabel ændrer sig lineært med en anden.

Eksempel

Antag, at en taxa koster 50 kr. i startgebyr og 10 kr. per kilometer. Lad x være antallet af kilometer, og y være den samlede pris. Modellen kan skrives som: $y = 10x + 50$

Lineær regression

Lineær regression er en metode til at finde den bedste rette linje, der beskriver sammenhængen mellem to variable i et datasæt. Denne metode bruges ofte til at forudsige værdier og forstå relationer mellem variabler.

Hvad er Lineær Regression?

Når vi har et sæt af datapunkter, kan vi bruge lineær regression til at finde en linje, der bedst passer til disse punkter. Linjen kan beskrives ved ligningen: $y = ax + b$ hvor a er hældningskoefficienten, og b er skæringspunktet med y -aksen.

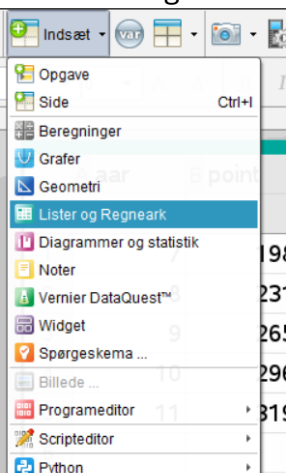
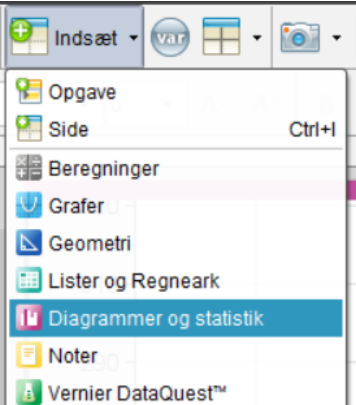
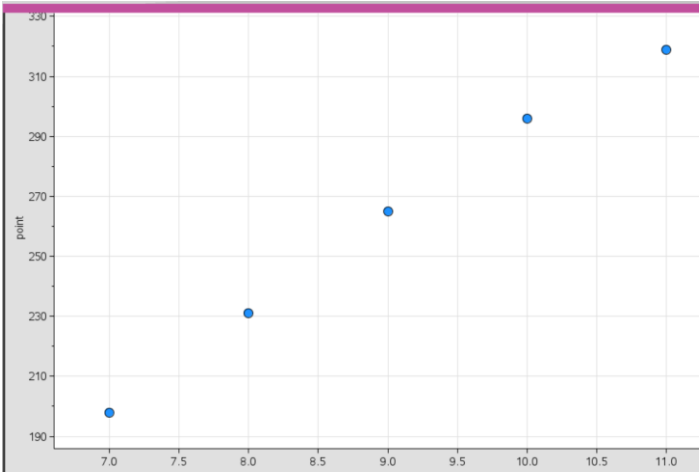
Formål med Lineær Regression

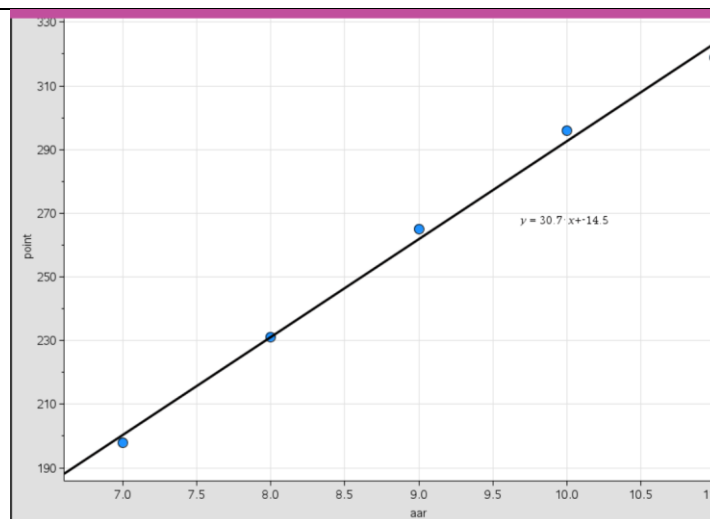
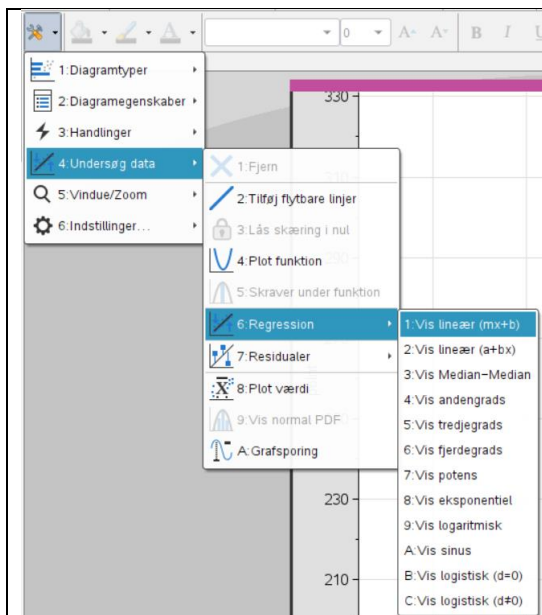
Formålet med lineær regression er at minimere afstanden mellem de faktiske datapunkter og de punkter, der ligger på den estimerede linje. Denne afstand kaldes residualen. Ved at minimere summen af kvadraterne af residualerne (mindste kvadraters metode) finder vi den linje, der bedst beskriver sammenhængen.

Dette gør vi ikke i hånden med ved brug af computere

Hvordan Udføres Lineær Regression?

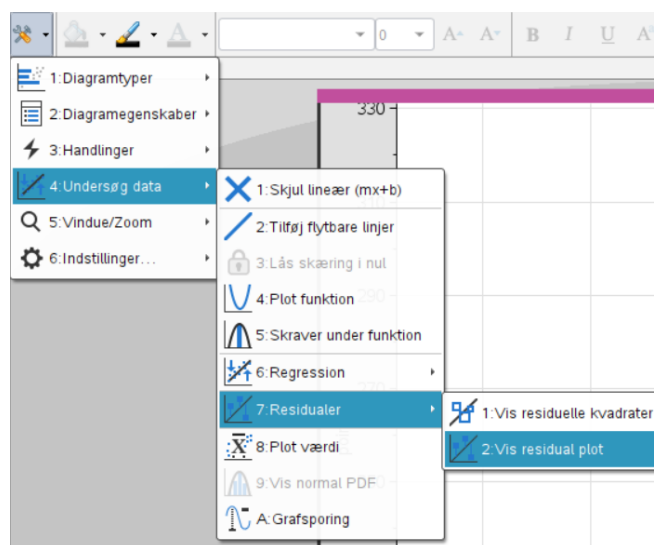
I dette kompendium vil jeg vise hvordan det gøres i Nspire. Det er lige så fint at gøre brug af fx GeoGebra eller Excel. Nspire er dog lettest når vi skal aflæse residualerne.:

Indsæt et regneark 	Udfyld dine data i to kolonner, husk at navngive dem øverst <table border="1" data-bbox="780 658 1235 1061"><thead><tr><th></th><th>A aar</th><th>B point</th><th>C</th></tr></thead><tbody><tr><td>=</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>7</td><td>198</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>8</td><td>231</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>9</td><td>265</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>10</td><td>296</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>11</td><td>319</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table>		A aar	B point	C	=				1	7	198		2	8	231		3	9	265		4	10	296		5	11	319		6			
	A aar	B point	C																														
=																																	
1	7	198																															
2	8	231																															
3	9	265																															
4	10	296																															
5	11	319																															
6																																	
Indsæt nu en ny side (diagrammer og statistik): 	Vælg nu de korrekte variable på de to akser. I vores eksempel er det Aar på x-aksen og Point på y-aksen 																																
Gå til værktøjsikonet og vælg lineær regression ($mx + b$):	Nu ser du en linje samt modellen (funktionsforskrift) på dit diagram fra før:																																

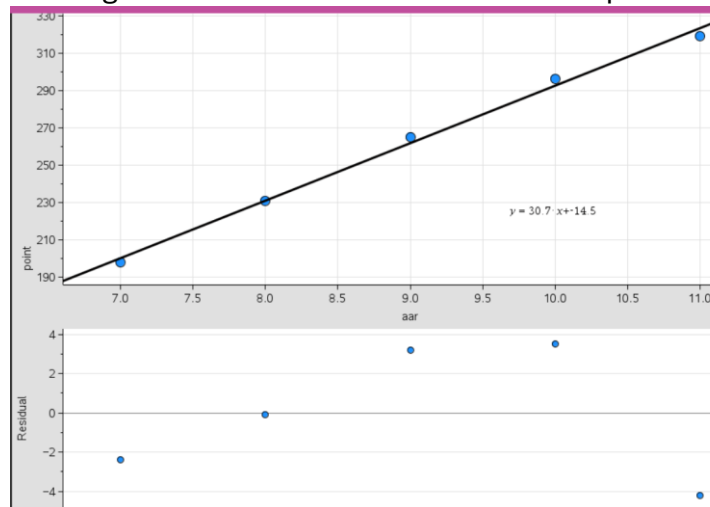


Har du brug for et residualplot kan du læse videre. I de fleste opgaver på C-niveau vil det ikke være nødvendigt.

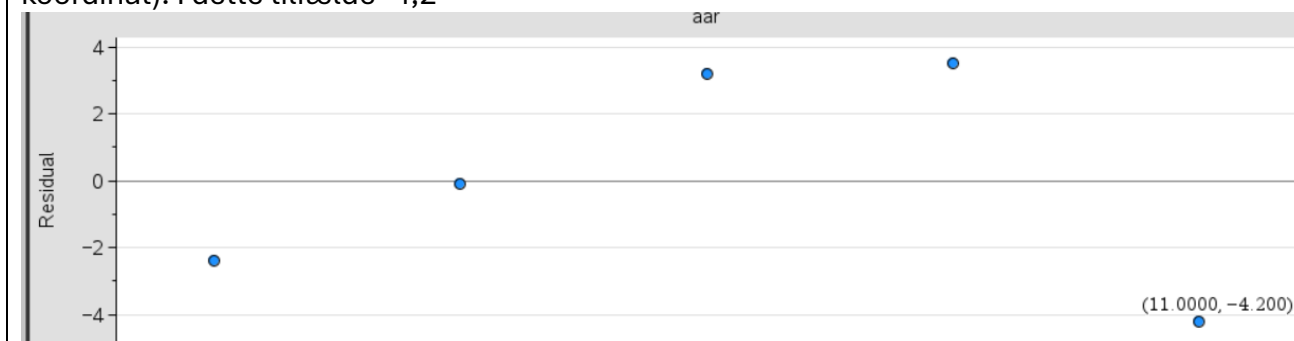
Lav nu et residualplot:



Under grafen fra før kan du nu se et residualplot:



Her kan du, hvis du holder musen over ét af punkterne se størrelsen på residualet (det er andet koordinat). I dette tilfælde -4,2



Eksempel

Opgave 9 En skoleelev tager en læsetest hvert år. Tabellen viser hvor mange point eleven får i testen.

Alder (år)	7	8	9	10	11
Point	198	231	265	296	319

Udviklingen de første år kan med god tilnærmelse beskrives med en lineær model

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

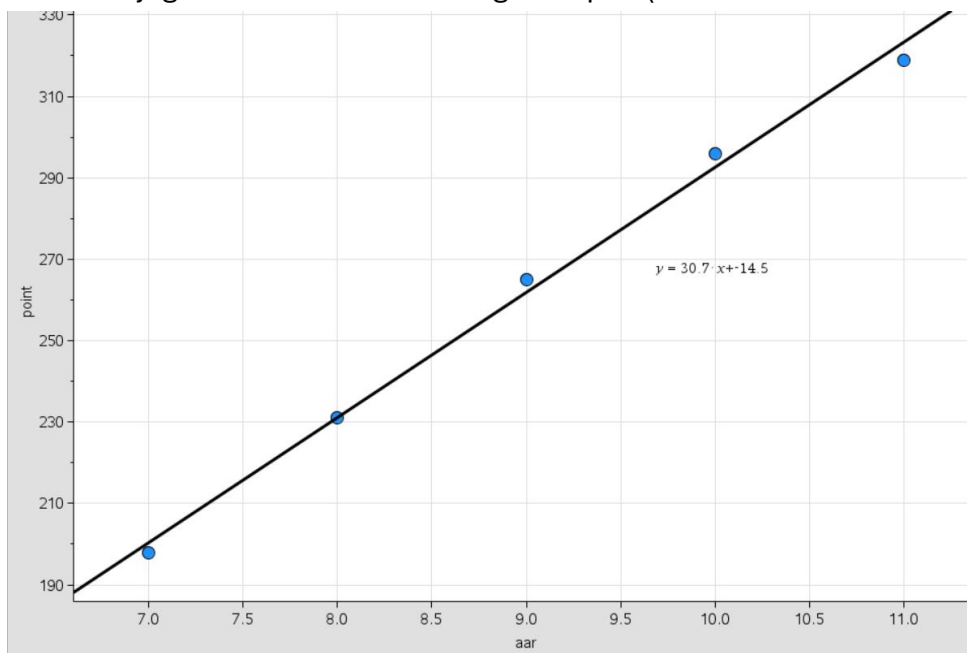
hvor x er elevens alder (målt i år), og $f(x)$ er antal point i læsetesten.

a) Bestem tallene a og b ved lineær regression.

Som 15-årig fik eleven 376 point i læsetesten.

b) Bestem $f(15)$, og undersøg, om 376 point afviger mere end 5 % fra modellens pointtal.

a) Her bestemmer jeg først modellen ved brug af Nspire (se hvordan i tabellen ovenfor):



Og finder at $f(x) = 30,7 \cdot x + 14,5$, Det betyder altså at $a = 30,7$ og $b = 14,5$

Det betyder altså, at for hvert år eleven bliver ældre vil han/hun få 30,7 point mere i testen (altså ifølge modellen). Man kan også tolke på at $b = 14,5$ det ville altså betyde at eleven ville få 14,5 point når han/hun var 0 år gammel - måske modellen ikke er passende for alle aldre?

- b) Første bestemmer jeg $f(15) = 30,7 \cdot 15 + 14,5 = 475$. Nu undersøger jeg om elevens resultat afviger mere end 5%. Først finder jeg forskellen: $475 - 376 = 99$

Nu udregner jeg hvor meget 99 udgør af de 475: $\frac{99}{475} \approx 0,2084211$ hvilket er 20,84%.

Altså afviger resultatet med mere end 5% fra modellen

Ekspontielle funktioner

I dette kapitel skal vi beskæftige os med eksponentialfunktioner, som bruges til at beskrive fænomener, der vokser eller aftager med en konstant procentdel over tid. Dette er relevant i mange virkelige situationer, f.eks. befolkningsvækst, renteberegning og radioaktivt henfald.

Definition og grafisk fremstilling

En eksponentialfunktion er en funktion af formen:

$$f(x) = b \cdot a^x$$

hvor:

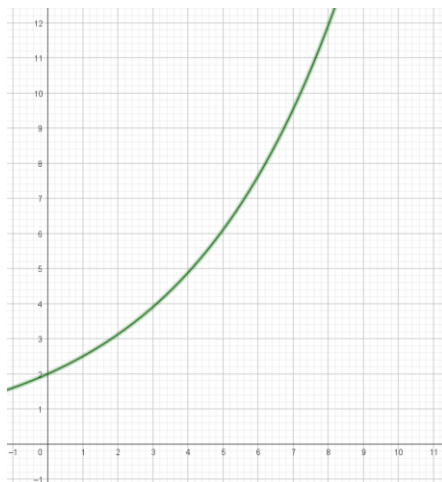
- a er fremskrivningsfaktoren ($a > 0$ og $a \neq 1$)
- b er begyndelsesværdien (y-værdien når $x = 0$)
- x er den uafhængige variabel
- r kaldes *vækstraten* er den procentuelle ændring. Altså hvor meget funktionen vokser eller aftager hver gang x øges med 1. den regnes ved $r = a - 1$

Grafer:

- Hvis $a > 1$ (a er større end 1) er funktionen voksende. Grafen stiger fra venstre mod højre.
- Hvis $0 < a < 1$ (a ligger mellem 0 og 1) er funktionen aftagende. Grafen falder fra venstre mod højre.
- Alle grafer for eksponentialfunktioner går gennem punktet $(0, b)$.

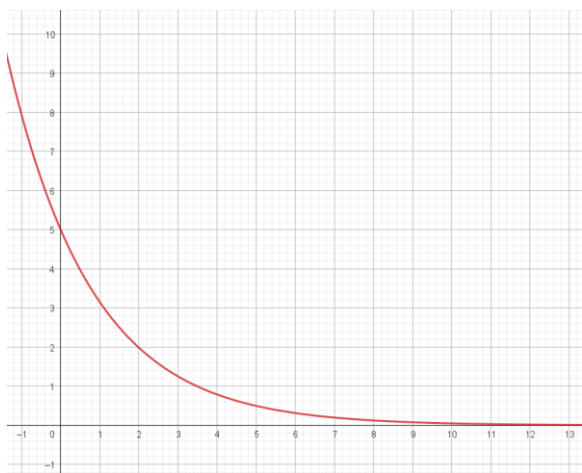
Eksempel 1 (Voksende): $f(x) = 2 \cdot 1,25^x$

- $b = 2$ (begyndelsesværdien)
- $a = 1,25$ (fremskrivningsfaktoren)
- $r = 1,25 - 1 = 0,25 = 25\%$



Eksempel 2 (Aftagende): $g(x) = 5 \cdot 0,63^x$

- $b = 5$ (begyndelsesværdien)
- $a = 0,63$ (fremskrivningsfaktoren)
- $r = 0,63 - 1 = -0,37 = -37\%$



Fordoblings- og halveringskonstant

- Fordoblingskonstant (T_2): Den tid det tager for funktionsværdien at blive fordoblet (kun relevant når $1 < a$).

- Halveringskonstant ($T_{\frac{1}{2}}$): Den tid det tager for funktionsværdien at blive halveret (kun relevant når $0 < a < 1$).

Formler:

- $T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$
- $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(a)}$

Eksempel 1 (Fordobling):

Hvis $a = 1,07$ (7% vækst), er $T_2 = \frac{\log(2)}{\log(1,07)} \approx 10,24$ år.

Det tager altså ca. 10,24 år for et beløb at fordobles med en årlig rente på 7%.

Eksempel 2 (Halvering):

Hvis $a = 0,95$ (5% aftagelse), er $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log(2)}{\log(0,95)} \approx 13,51$.

Det tager altså ca. 13,51 perioder (f.eks. år) for en mængde at blive halveret, hvis den aftager med 5% pr. periode.

Titalslogaritmen (log)

Titalslogaritmen (log) er den inverse/omvendte funktion til 10^x . Det betyder, at:

- $\log(10^x) = x$
- $10^{\log(x)} = x$

Logaritmer bruges til at løse eksponentialligninger.

Regneregler for logaritmer (vigtige for C-niveau):

- $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$
- $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

Eksempel 1:

$$\log(100) = \log(10^2) = 2$$

Eksempel 2:

$$\log(20) = \log(2 \cdot 10) = \log(2) + \log(10) \approx 0,301 + 1 = 1,301$$

Eksempel 3:

$$\log(0,1) = \log(10^{-1}) = -1$$

5. Løsning af eksponentialligninger

Vi ser på ligninger af formen:

$$b \cdot a^x = c$$

Eksempel 1:

$$\text{Løs } 5 \cdot 2^x = 80$$

$$2^x = \frac{80}{5}$$

$$\log(2^x) = \log\left(\frac{80}{5}\right)$$

$$x \cdot \log(2) = \log(16)$$

$$x = \frac{\log(16)}{\log(2)}$$

Eksempel 2:

$$3 \cdot 1,05^x = 10$$

$$1,05^x = \frac{10}{3}$$

$$\log(1,05^x) = \log\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$x \cdot \log(1,05) = \log\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$x = \frac{\log\left(\frac{10}{3}\right)}{\log(1,05)} \approx 1,736966$$

Regression

Regression bruges til at finde den eksponentielle funktion, der passer bedst til en række data.

I videoen her kan du se hvordan eksponentiel regression kan udføres i Nspire:

[Eksponentiel regression på Nspire](#)

Finansiel regning

I dette kapitel skal vi se nærmere på matematikken der ligger bag lån og opsparingsmodeller. Vi skal arbejde med kapitalfremskrivning, herunder hvordan den hænger sammen med eksponentielle funktioner. Vi kigger desuden nærmere på annuitetslån og annuitetsopsparinger samt på de forskellige aspekter af at optage lån.

Rentebegreber:

Rente er betaling for at låne penge (eller modtage betaling for at udlåne penge). Rente udtrykkes normalt som en procentdel af det lånte beløb over en bestemt periode, oftest et år.

Årlig rente (Nominel rente) r :

- Definition: Den *nominelle rente* er den rente, der typisk angives på et lån eller en investering for et helt år. Den nominelle rente tager *ikke* højde for, at renter kan tilskrives flere gange om året og dermed give *renters rente* (hvilket vi forklarer senere). Det er den "rå" årlige rente. Den kaldes også den pålydende rente.
- Eksempel: Hvis et lån har en nominel årlig rente på 8%, betyder det, at du skal betale 8 kr. i rente for hver 100 kr., du låner på et år, *hvis* renten kun beregnes én gang om året.

Terminsrente r_t :

- Definition: En *termin* er en periode, hvor renten beregnes og lægges til det skyldige beløb. En termin kan f.eks. være en måned, et kvartal (3 måneder), et halvår (6 måneder) eller et år. *Terminsrente* er så den rente, der beregnes for hver enkelt af disse perioder (terminer).
- Formel: Hvis vi kender den årlige rente (den *nominelle rente*) og ved, hvor mange terminer der er på et år, kan vi beregne terminsrenten. Lad os sige, at den nominelle årlige rente er r , og der er n terminer på et år. Så er terminsrenten (r_t) givet ved:

$$r_t = \frac{r}{n}$$

- Eksempel: Forestil dig, at den nominelle årlige rente er 6%, og renten tilskrives hvert kvartal. Da der er 4 kvartaler på et år, er der 4 terminer. Terminsrenten er da:

$$r_t = \frac{0,06}{4} = 0,015 = 1,5\% \text{ pr. kvartal}$$

Renters rente og Effektiv årlig rente:

- Definition af Renters rente: *Renters rente* opstår, når rente, der er tilskrevet i en tidligere termin, også begynder at forrente sig i de efterfølgende terminer. Det betyder, at du får rente på din rente.
- Definition af Effektiv årlig rente: Den *effektive årlige rente* er den faktiske rente, du betaler eller modtager over et helt år, *når* vi tager højde for renters rente. Den effektive rente er normalt højere end den nominelle rente, når renten tilskrives mere end én gang om året.

- Formel: Hvis den nominelle årlige rente er r , og renten tilskrives n gange om året (dvs. der er n terminer), er den effektive årlige rente (i) givet ved:

$$i = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$

- Eksempel: Lad os sige, at den nominelle årlige rente er 6%, og renten tilskrives månedligt (12 gange om året, dvs. 12 terminer). Den effektive årlige rente er da:

$$i = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} - 1 = (1,005)^{12} - 1 \approx 0,06168 \approx 6,17\%$$

Her ser vi, at den effektive rente (6,17%) er lidt højere end den nominelle rente (6%), netop på grund af renters rente.

Gennemsnitlig rente

Gennemsnitlig rente over en periode med variable renter:

Dette bruges, når renten på en investering eller et lån ændrer sig over tid. I stedet for at se på renten for hvert enkelt år eller periode, beregner man en gennemsnitlig rente, der repræsenterer den "gennemsnitlige" forrentning over hele perioden.

- **Hvordan beregnes det?**

Den mest præcise måde at beregne den gennemsnitlige rente over en periode med variable renter er ved at bruge den *geometriske gennemsnitsrente*. Dette tager højde for renters rente-effekten.

Formlen ser sådan ud:

$$r_g = \sqrt[n]{(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3) \cdot \dots \cdot (1 + r_n)} - 1$$

Hvor:

- r_g er den gennemsnitlige rente
- n er antallet af perioder
- $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ er renterne for hver periode (udtrykt som decimaltal, f.eks. 5% = 0,05)

- **Eksempel:**

Lad os sige, du har en investering over 3 år med følgende årlige renter:

- År 1: 6% (0,06)
- År 2: 8% (0,08)

- År 3: 2% (0,02)

Den gennemsnitlige rente beregnes således:

$$r_g = \sqrt[3]{(1 + 0,06)(1 + 0,08)(1 + 0,02)} - 1 \approx 0,0530$$

Den gennemsnitlige årlige rente over de 3 år er altså ca. 5,3%.

ÅOP (Årlige Omkostninger i Procent):

ÅOP er et nøgletal, der giver dig et samlet overblik over de *faktiske* årlige omkostninger ved et lån, udtrykt i procent af det samlede lånebeløb. Det er designet til at gøre det nemmere for dig at sammenligne forskellige lånetilbud, da det tager højde for *alle* omkostninger, ikke kun renten.

Hvad inkluderer ÅOP?

ÅOP er mere omfattende end blot den nominelle rente. Det inkluderer typisk:

- Renter: Både den nominelle rente og eventuelle variable rentetillæg.
- Gebyrer:
 - Etableringsgebyr/Oprettelsesgebyr: Et engangsgebyr for at oprette lånet.
 - Tinglysningsafgift (ved visse lån som f.eks. boliglån): Afgift til staten for at registrere lånet.
 - Administrationsgebyrer/Servicegebyrer: Løbende gebyrer for administration af lånet.
 - Ekspeditionsgebyrer: Gebyrer for at behandle ansøgningen og udbetale lånet.
- Provisioner: Betaling til mellemænd eller formidlere.
- Andre omkostninger: F.eks. omkostninger til vurdering af ejendom ved boliglån eller forsikringspræmier, hvis det er et krav for lånet.

Hvorfor er ÅOP vigtig?

ÅOP er vigtig, fordi den giver et mere retvisende billede af de reelle omkostninger ved et lån end den nominelle rente alene. Her er et par eksempler, der illustrerer dette:

- Eksempel 1: To lån med samme nominelle rente, men forskellige gebyrer: To lån har begge en nominel rente på 4%. Lån A har et etableringsgebyr på 2.000 kr., mens Lån B ikke har noget etableringsgebyr. Selvom den nominelle rente er den samme, vil Lån A

have en højere ÅOP, da etableringsgebyret medregnes i de samlede omkostninger. Derfor er Lån B reelt billigere.

- Eksempel 2: "Rentefrit" lån med høje gebyrer: Et lån annonceres som "rentefrit", men har til gengæld meget høje etableringsgebyrer og andre omkostninger. Selvom der ikke er nogen rente, kan ÅOP'en være meget høj, hvilket betyder, at lånet stadig kan være dyrt.

Hvordan beregnes ÅOP?

Beregningen af ÅOP er kompleks og tager højde for alle de nævnte omkostninger samt lånets løbetid og afdragsstruktur. Der findes ikke en simpel formel, man kan bruge i hånden. I stedet bruges der typisk:

- Standardiserede formler og algoritmer: Disse er defineret i lovgivningen for at sikre, at ÅOP beregnes på samme måde af alle långivere.
- Regneark (f.eks. Excel): Der findes regnearksskabeloner, der kan bruges til at beregne ÅOP.
- Online ÅOP-beregnere: Mange finansielle hjemmesider tilbyder gratis ÅOP-beregnere.
- Långivernes egne systemer: Långiverne bruger specialiseret software til at beregne ÅOP.

Vigtige ting at huske om ÅOP:

- Sammenligning: ÅOP er mest nyttig, når du sammenligner lån med *samme løbetid*. Hvis du sammenligner et lån på 1 år med et lån på 5 år, vil ÅOP ikke give et retvisende billede, da omkostningerne fordeles over en forskellig periode.
- Lovpligtig oplysning: Långivere er *forpligtet* til at oplyse ÅOP, inden du indgår en låneaftale.
- Fokus på ÅOP ved sammenligning: Når du skal vælge et lån, bør du primært fokusere på ÅOP, da det giver det mest præcise billede af de samlede omkostninger.

Eksempel på ÅOP i praksis:

Lad os sige, du overvejer et lån på 10.000 kr. med følgende vilkår:

- Nominel rente: 8%
- Etableringsgebyr: 500 kr.
- Månedligt administrationsgebyr: 25 kr.
- Løbetid: 12 måneder

Selvom den nominelle rente er 8%, vil ÅOP'en være *højere* på grund af gebyrerne. Ved at bruge en ÅOP-beregner vil du sandsynligvis se en ÅOP på omkring 12-14% (det præcise tal afhænger af beregningsmetoden). Dette viser, at de reelle omkostninger ved lånet er betydeligt højere end den nominelle rente indikerer.

Annuitetsregning:

Annuitetsopsparing:

$$A_n = y \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Eksempel 1:

Jeg indsætter 500kr på min opsparing hver måned. Jeg har en månedlig rente på min opsparing på 0,25% = 0,0025. Efter 2 år (24 måneder) står der:

$$A_{24} = 500 \cdot \frac{(1 + 0,0025)^{24} - 1}{0,0025} \approx 12351,41kr. \text{ på kontoen}$$

Deskriptiv statistik

- Beskrivelse og grafisk repræsentation af ugrupperet og grupperet observationsmateriale
- Simple statistiske deskriptorer

Sandsynlighedsregning

- Sandsynlighedsfelt
- Kombinatorik